# 4. cvičení z Matematiky 2

Matěj Novotný

16.3.2016

## Úlohy na cvičení

**G1** Spočtěte parciální derivace podle všech proměnných u funkcí

$$a) f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\quad b) f(x,y)=2x^3y^2+\frac{y}{x},\quad c) f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^4),\quad d) f(x,y,z)=\frac{e^x+e^y+z}{x^2+z^2},$$

**G2** Pro funkci $f$ z **G1** $c)$ a vektory $u_1=(1,-2,1),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,0,0)$ vypočtěte derivace

$$a)\frac{\partial f}{\partial u_1}(x,y,z),\quad b)\frac{\partial f}{\partial u_2}(x,y,z),\quad c)\frac{\partial f}{\partial u_3}(1,1,1),\quad d)\frac{\partial f}{\partial (u_1+u_2)}(1,-1,0),$$

**G3** Vyšetřete (z definice) existenci a spojitost parciálních derivací v bodě $(0,0)$ u funkcí

$$a) f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},\quad b) f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

**G4** Nechť $f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, n,m\in\mathbb{N}$. Grafem $f$ rozumíme množinu $\mathcal{G}(f)=\{(x,f(x)): x\in D\}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ nebo také zobrazení

$$\mathcal{G}_f: D\to\mathbb{R}^{n+m},\ \mathcal{G}_f(x)=(x,f(x)).$$

Pro $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ hladce diferencovatelnou máme v bodě $a=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\text{bod grafu } f:\quad \mathcal{G}_f(a)=(x_1,...,x_n,f(x_1,...,x_n))$$

$$\text{tečný vektor v } i\text{-tém souřadnicovém směru}:\quad \frac{\partial\mathcal{G}_f}{\partial x_i}(a)=\left(0,..,\underbrace{1}_{i\text{-tá pozice}},0...,0,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)=:u_i$$

$$\text{tečný prostor ke grafu}:\quad T_a\mathcal{G}_f=\left\{\mathcal{G}_f(a)+\sum_{i=1}^n\alpha_iu_i:\ \alpha_i\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\mathcal{G}_f(a)+\operatorname{span}\{u_i, i\in\{1,...,n\}\}$$

$$\text{normálu ke grafu (směřující "dovnitř")}:\quad \overleftarrow{n}=-u_1\times...\times u_n=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a),-1\right).$$

Nalezněte směrový i normálový zápis tečných rovin ke grafu funkce

$$a) f(x,y)=2x^2+y^2 \text{ v bodě } (1,1,3),\quad b) f(x,y)=xy+\sin(x+y) \text{ v bodě } (1,-1,-1),$$

$$c) f(x,y)=\frac{x}{y}-\frac{y}{x} \text{ v bodě } (1,1,0),\quad d) f(x,y)=e^{x+y}y \text{ v bodě } (0,0,0).$$

**G5** Nalezněte rovnici tečné roviny k elipsoidu

$$x^2+2y^2+z^2=13,$$

která je rovnoběžná s rovinou $2x+4y+z=0$.